4.5 Funciones de Lipschitz

El siguiente resultado corresponde al teorema 4.5.1 del libro.

Teorema 1 *Sea $D \subset \mathbb{R}^N$. Si $f : D \to \mathbb{R}^N$ es una función de Lipschitz, entonces:*

i) Existe $K > 0$ tal que $\mu^*(f(A)) \ \le \ K\mu^*(A), \ \forall\, A \subset \mathbb{R}^N$.

ii) f preserva conjuntos de medida cero.

iii) f preserva conjuntos medibles.

Demostración Sea $A \subset D$. Consideremos una colección de cubos en $\mathbb{R}^N$, $\{Q_k : k \in \mathbb{N}\}$, tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$. Luego, $A \subset \cup_{k=1}^{\infty}(Q_k \cap A)$. Lo cual implica que $f(A) \subset \cup_{k=1}^{\infty} f(Q_k \cap A)$. Por lo tanto,

$$\mu^*(f(A)) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(f(Q_k \cap A)). \tag{4.4}$$

Sea C una constante de Lipschitz para f. Resulta entonces

$$\operatorname{diam} f(Q_k \cap A) \le C \operatorname{diam} Q_k.$$

Por el lema anterior, esto implica que

$$\mu(f(Q_k \cap A)) \ \le \ 2^N C^N (\operatorname{diam} Q_k)^N = 2^N C^N N^{\frac{n}{2}} \mu(Q_k).$$

De aquí, por (4.4), se obtiene

$$\mu^*(f(A)) \le 2^N C^N N^{\frac{N}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Q_k).$$

En virtud de ii) en el lema 4.5.1, esto implica lo afirmado.

ii) Sea $E \subset D$ tal que $\mu(E) = 0$. A partir de lo establecido en ii), esto implica que $\mu^*(f(E)) = 0$.

iii) Finalmente, sea $E \subset D$ un conjunto medible. De acuerdo al corolario 4.1 y a la observación que le sigue, existe un conjunto σ-compacto $K \subset E$ tal que $\mu(E \setminus K) = 0$. Por la continuidad de f, notemos que $f(K)$ también es σ-compacto. En particular, $f(K)$ es medible. Ya que, por lo establecido en ii), $f(E \setminus K)$ tiene medida cero, concluimos que $f(E) = f(K) \cup f(E \setminus K)$ es medible. $\square$

Corolario 1 *Sea $V \subset \mathbb{R}^N$ un subespacio vectorial. Si $\dim V \le N-1$, entonces $x + V, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N$, tiene medida cero.*

Demostración Consideraremos primero el caso en que $x = 0$. Si $\dim V = 0$, la conclusión es clara. Supongamos ahora que $0 < \dim V$ y elijamos como $\{v_1, \ldots, v_s\}$ una base de V. Por hipótesis, se cumple $s \leq N - 1$. A continuación añadamos a esta base otros vectores, $w_1, \ldots, w_r$, para obtener una base de $\mathbb{R}^N$. Notemos que $r > 0$ y $N = s + r$. Sea $\{e_1, \ldots, e_N\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^N$. Definamos en seguida $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ por

$$T(\sum_{j=1}^{N} a_j e_j) := \sum_{j=1}^{s} a_j v_j + \sum_{j=1}^{r} a_{s+j} w_j. \tag{4.5}$$

Observemos que T es lineal. Por lo tanto, T es de Lipschitz en $\mathbb{R}^N$. Sea $W = \mathbb{R}^{N-1} \times 0$. Ya que $s \leq N - 1$, de (4.5) resulta que $V \subset T(W)$. Puesto que $\mu(W) = 0$, el teorema anterior implica ahora que $\mu(V) \leq \mu(T(W)) = 0$.

El caso general se obtiene a partir del caso anterior teniendo presente que la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones. $\square$

Funciones localmente de Lipschitz

Sea $D \subset \mathbb{R}^N$. Una función $f : D \to \mathbb{R}^M$ es *localmente de Lipschitz*, si para cada $x \in D$, existe $r > 0$ tal que f es de Lipschitz en $D \cap V_r(x)$.

Ya que cualquier función de Lipschitz es continua, se sigue que si f es localmente de Lipschitz, entonces f es continua.

Para continuar necesitamos del siguiente resultado.

Lema 1 *Si $D \subset \mathbb{R}^N$, entonces de cualquier cubierta abierta suya se puede extraer una subcubierta numerable.*

Demostración Fijemos $D \subset \mathbb{R}^N$ y consideremos una cubierta $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ de D formada por conjuntos abiertos. Sea $x \in D$ y elijamos $\alpha \in J$ tal que $x \in V_\alpha$. Por la densidad de $\mathbb{Q}^N$ en $\mathbb{R}^n$, notemos que existe una bola abierta $V_r(q)$, donde $q \in \mathbb{Q}^N,\ r \in \mathbb{Q}^+$, tal que $x \in V_r(q) \subset V_\alpha$.

Denotemos por $\mathcal{C}$ la colección formada por todas las bolas abiertas $\{V_r(q)$ tales que $q \in \mathbb{Q}^N,\ r \in \mathbb{Q}^+$ y $V_r(q) \subset V_\alpha$, para algún $\alpha \in I\}$ Claramente $\mathcal{C}$ es numerable y de lo anterior podemos notar que $\mathcal{C}$ es una cubierta de D.

Para cada $V \in \mathcal{C}$ elijamos $\alpha(V) \in J$ tal que $V_{\subset} V_{\alpha(V)}$. Entonces olección de abiertos $\{V_{\alpha(V)} : V \in \mathcal{C}\}$ es una subcubierta numerable de D. $\square$

Corolario 2 *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto medible. Si $f : E \to \mathbb{R}^M$ es localmente de Lipschitz, entonces f preserva conjuntos de medida cero y conjuntos medibles.*

Demostración De acuerdo a la hipótesis, para cada $x \in E$ existe $r(x) > 0$ tal que f es de Lipschitz en $V_{r(x)}(x) \cap D$. Así, la colección $\{V_{r(x)}(x) : x \in E\}$ es una cubierta abierta de E. Por el lema anterior, existe entonces una subcubierta numerable, digamos $\{V_n : n \in I\!N\}$.

Sea $A \subset E$ un conjunto de medida cero. Ya que f es de Lipschitz en cada conjunto $E \cap V_n$, se sigue del teorema 1 que $\mu(f(A \cap V_n)) = 0$. Luego, $\mu(f(A)) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(A \cap V_n)) = 0$.

Argumentando de forma similar a la anterior, concluimos que si $A \subset E$ es medible, entonces también lo es $f(A)$ $\Box$

4.6 Medida y transformaciones lineales

Teorema 1 *Si $T : I\!R^N \to I\!R^N$ es una transformación lineal, entonces,*

$$\mu^*(T(A)) \ = |\det T| \ \mu^*(A), \ \ A \subset I\!R^N. \tag{4.6}$$

Demostración Supongamos primero que $\det T = 0$. Entonces, T no es sobre. Luego, $\dim T(I\!R^N) \leq N - 1$. Por el corolario 4.5.1, esto implica que la medida de $T(I\!R^N)$ es cero. Se sigue entonces que $\mu^*(T(A)) = 0, \ A \subset I\!R^N$. Por consiguiente, se satisface (1).

Denotemos por $\mathcal{G}$ la colección de operadores lineales $T : I\!R^N \to I\!R^N$ tales que $\det T \neq 0$ y cumplen con (1). Probaremos primero que

$$\text{si } R, S \in \mathcal{G}, \quad \text{entonces } RS \in \mathcal{G}. \tag{4.7}$$

Sean pues $R, S \in \mathcal{G}$. Claramente RS es lineal y $\det RS = \det R \det S \neq 0$. Consideremos $A \subset I\!R^N$. Entonces

$$\mu^*(RS(A)) \ = |\det R| \ \mu^*(S(A)) \ = |\det R||\det S| \ \mu^*(A) \ = |\det RS| \ \mu^*(A).$$

Lo cual señala que $RS \in \mathcal{G}$.

A continuación probaremos que los siguientes tipos de transformaciones lineales pertenecen a $\mathcal{G}$.

a) Sea $1 \leq j < k \leq N$ y $T_{k,j}$ la transformación lineal que intercambia las coordenadas j y k, esto es,

$$T_{k,j}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_N) \ := \ (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots, x_N).$$

Tomemos $S := T_{k,j}$. Empezaremos calculando $\det S$. Para ello notemos que la matriz de S (respecto de la base canónica) se obtiene permutando las columnas j y k de la matriz identidad I. Luego, $\det S = -1$. Debemos probar entonces que

$$\mu^*(S(A)) \ = \ \mu^*(A), \ \ A \subset I\!R^N. \tag{4.8}$$

Esto nos lleva a considerar el lema 4.4.2.

Sea $R = I_1 \times \ldots \times I_j \times \ldots \times I_k \times \ldots \times I_N$, donde I_j es un intervalo acotado, $j = 1, \ldots, N$. Entonces

$$S(R) \;=\; I_1 \times \ldots \times I_k \times \ldots \times I_j \times \ldots \times I_N$$

es otro rectángulo acotado y $\mu(S(R)) = \mu(R)$. Como $S^{-1} = S$, podemos aplicar el lema 4.4.2 para obtener (3).

b) Sea $1 \leq j \leq N,\ c \neq 0$ y $M_{j,c}$ la transformación lineal que multiplica la coordenada j por c, esto es,

$$M_{j,c}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_N) \;:=\; (x_1, \ldots, cx_j, \ldots, x_N).$$

Tomemos $S := M_{j,c}$. Calcularemos primero $\det S$. Para ello notemos que la matriz de S se obtiene multiplicando por c la j-ésima columna de I Luego, $\det S = c$. Debemos probar entonces que

$$\mu^*(S(A)) \;= |c|\; \mu^*(A),\ A \subset I\!R^N. \tag{4.9}$$

Sea $R = I_1 \times \ldots \times I_j \times \ldots \times I_k \times \ldots \times I_N$, donde I_j es un intervalo acotado, $j = 1, \ldots, N$. Entonces

$$S(R) \;=\; I_1 \times \ldots \times cI_k \times \ldots \times I_N$$

es otro rectángulo acotado y $\mu(S(R)) = |c|\; \mu(R)$. En este caso se tiene que $S^{-1} = M_{j,c^{-1}}$, por lo que también se cumple $\mu(S^{-1}(R)) =|c^{-1}|\; \mu(R)$. Esto permite aplicar el lema 4.4.2 para obtener (4).

c) Sea $j, k \in \{1, \ldots, N\}, j \neq k$ y $S_{j,k}$ la transformación lineal definida por

$$S_{j,k}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_N) \;:=\; (x_1, \ldots, x_j + x_k, \ldots, x_k, \ldots, x_N).$$

(Para fijar ideas hemos supuesto que $j < k$.)

Tomemos $S := S_{j,k}$. Para calcular $\det S$ notemos que su matriz se obtiene de la matriz identidad variando únicamente la fila j. En ésta aparecen ahora la suma de las filas j y k de la matriz identidad. Luego, $\det S = 1$. Debemos probar entonces que

$$\mu^*(S(A)) \;= \mu^*(A),\ A \subset I\!R^N. \tag{4.10}$$

En este caso S no preserva rectángulos, lo cual se apreciará a continuación. Sin embargo, trabajando con cubos es todavía posible usar el lema 4.4.2. Ya que S es un homeomorfismo, notemos que si C es un cubo, entonces $S(C)$ es compacto y, en consecuencia, medible.

Estableceremos en seguida que

$$\mu(S(C)) \ = \mu(C), \ C \in \mathcal{Q}. \tag{4.11}$$

Sea $C \in \mathcal{Q}$. Como μ es invariante bajo traslaciones, podemos suponer que C es de la forma

$$C \ = \ [0,r]^N = \{(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_N) : 0 \leq x_\ell \leq r, \ell = 1, \ldots, N\},$$

donde $r > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} S(C) \ &= \ \{(x_1, \ldots, x_j + x_k, \ldots, x_k, \ldots, x_N) : 0 \leq x_\ell \leq r, \ell = 1, \ldots, N\} \\ &= \ \{(x_1, ..., y_j, ..., x_k, ..., x_N) : 0 \leq x_\ell \leq r, \ell \neq j, x_k \leq y_j \leq x_k + r\} \\ &= \ A \cup B, \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde

$$\begin{aligned} A \ &:= \ \{\{(x_1, \ldots, y_j, \ldots, x_k, \ldots, x_N) : 0 \leq x_\ell \leq r, \ell \neq j, x_k < y_j \leq r\} \\ B \ &:= \ \{(x_1, \ldots, y_j, \ldots, x_k, \ldots, x_N) : 0 \leq x_\ell \leq r, \ell \neq j, r \leq y_j \leq x_k + r\}. \end{aligned}$$

Como B es compacto y $A = S(C) \setminus B$, notemos que tanto A como B son medibles.

Denotemos por e_j el j-ésimo vector canónico. Luego

$$B - re_j = \{(x_1, \ldots, y_j, \ldots, x_k, \ldots, x_N) : 0 \leq x_\ell \leq r, \ell \neq j, 0 \leq y_j \leq x_k\},$$

y, por lo tanto

$$(B - re_j) \cup A = C. \tag{4.13}$$

Notemos que $A \cap B = \emptyset$ y $\mu(A \cap (B - re_j)) = 0$. Luego, teniendo presente que μ es invariante bajo traslaciones, de (7) y (8) se obtiene (6).

Notemos a continuación que $S^{-1} = M_{k,-1} S M_{k,-1}$. Ya que $M_{k,-1}$ preserva cubos, de (4) y (5) se sigue que

$$\mu(S^{-1}(C)) \ = \mu(C), \ C \in \mathcal{Q}. \tag{4.14}$$

A partir de (6) y (9), podemos aplicar ahora el lema 4.4.2 y obtener (5).

Finalmente, consideremos $T : I\!R^N \to I\!R^N$, $\det T \neq 0$. Entonces, por un resultado de Algebra Lineal, $T = S_1 \ldots S_m$ donde los $S_j, \ j = 1, \ldots, m$ son transformaciones lineales del tipo a), b) o c). En virtud de (2), esto prueba que $T \in \mathcal{G}$. $\square$

Ejemplo 1 $\mu(V_r(0)) = r^n \mu(V_1(0)),\ r > 0.$

Demostración Sea $T : I\!\!R^N \to I\!\!R^N$ definida por $Tx = rx$. Consideremos $x \in I\!\!R^N$. Entonces, $\|x\| < 1$ si, y sólo si, $\|rx\| < r$. Esto indica que

$$T(V_1(0)) = V_r(0). \tag{4.15}$$

Observemos que T es lineal y $\det T = r^n$. Luego, de (10) y el teorema anterior se concluye que $\mu(V_r(0)) = r^n \mu(V_1(0))$.

Fernando Galaz Fontes
Mayo 12, 2014.